

Concursion des exercices Fonction inverse / homographique

Démonstration au programme, à savoir repère:

Montrons que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi que sur $\mathbb{R}_-^*$.

• Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Notons f la fonction inverse.

f est décroissante si $a < b \rightarrow f(a) > f(b)$ (on parle de stricte décroissance)

Supposons $a < b$.

On veut montrer que $f(a) > f(b)$, ce qui est équivalent à $f(a) - f(b) > 0$.

Calculons $f(a) - f(b)$.

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$$

Or $a < b$, donc $b-a > 0$, et a et b de même signe (dans $\mathbb{R}_+^*$) donc $ab > 0$.

Ainsi, $\frac{b-a}{ab} > 0$, i.e. $f(a) - f(b) > 0$, i.e. $f(a) > f(b)$.

|| Donc f est bien strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour $a, b \in \mathbb{R}_-^*$, on fait la même démonstration et on a bien $ab > 0$ car a et b sont de même signe (dans $\mathbb{R}_-^*$).

Ex. 12.1 Si $a, b \neq 0$, l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$; Rappel: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

a) $f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{7}{5}$

b) $f\left(-\frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{-1}{9}\right) = \frac{9}{-1} = -\frac{9}{1} = -9$

c) $f\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

d) $f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{8}{5}$

e) $f(10^{-6}) = \frac{1}{10^{-6}} = 10^{-(-6)} = 10^6$

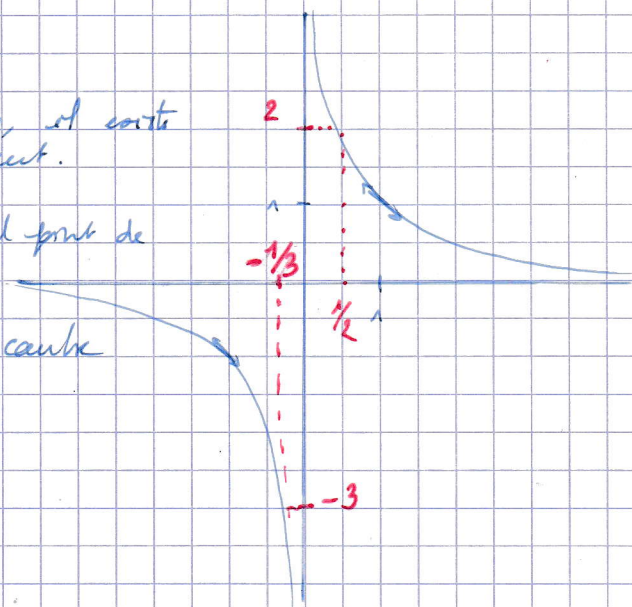
f) $f(10^5) = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$

Ex. 12.2

Si on prend 2 sur l'axe des ordonnées, il existe un seul point de la courbe correspondant.

De même, il existe un et un seul point de la courbe d'ordonnée -3.

En fin, il n'existe aucun point de la courbe qui ait pour ordonnée zéro.



Ex 12.3

- a) $f(x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$, donc $f^{-1}(\{\frac{4}{3}\}) = \{\frac{3}{4}\}$.
- b) $f(x) = 0,02 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \Leftrightarrow x = 50$, donc $f^{-1}(\{0,02\}) = \{50\}$.
- c) $f(x) = 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 10^{-5} \Leftrightarrow x = 10^5$, donc $f^{-1}(\{10^{-5}\}) = \{10^5\}$.
- d) $f(x) = 2 \cdot 10^4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \cdot 10^4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, donc $f^{-1}(\{2 \cdot 10^4\}) = 0,5 \cdot 10^{-4}$.

Ex 12.4

a) et b) voir sur le pycnopr, après le monod.

$$\begin{array}{l|l} \text{c) } \cdot f(-3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} & \cdot \frac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \cdot f(1) = \frac{1}{1} = 1 & \cdot \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1} = 1 \\ \cdot f(\frac{3}{2}) = \frac{2}{3} & \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \end{array}$$

Ex 12.5

a) On a $P \times V = 1 \Leftrightarrow P = \frac{1}{V} \Leftrightarrow V = \frac{1}{P}$, qui sont des fonctions inverses.

b) $0,5 < V < 5$

$$\frac{1}{0,5} > \frac{1}{V} > \frac{1}{5}$$

$$2 > P > 0,2$$

la fonction inverse est strictement décroissante donc les images (2^e ligne de calcul) sont dans l'ordre inverse des antécédents (1^{re} ligne de calcul).

La pression se situe entre 0,2 bars et 2 bars.

Ex 12.6

$$f: x \mapsto f(x) = 5x - \frac{1}{2x} + 6 = \underbrace{5x + 6}_{\text{affine}} - \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\text{inverse}}$$

a) En tant que différence de fonction affine et de fonction inverse, f est définie sauf pour les valeurs de x qui annulent le dénominateur du terme $\frac{1}{2x}$. Or $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ainsi, $\text{Df} = \mathbb{R}^*$

! Pas de problème car ça va au Bac!

$$\begin{aligned} \text{b) } \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) &= 5x - \frac{1}{2x} + 6 \\ &= \frac{5x \times 2x - 1 + 6 \times 2x}{2x} \\ &= \frac{10x^2 + 8x - 1}{2x} \end{aligned}$$

f n'est pas une fonction homographe car son numérateur est de degré 2 ("contient des x^2 ").

Ex 12.7

$$f: x \in]1; +\infty[\rightarrow f(x) = \frac{3}{x-1}$$

Soient $u, v \in]1; +\infty[$ tq $u \leq v$.

$$\begin{aligned} 1) \quad a) \quad f(u) - f(v) &= \frac{3}{u-1} - \frac{3}{v-1} = \frac{3(v-1)}{(u-1)(v-1)} - \frac{3(u-1)}{(u-1)(v-1)} \\ &= \frac{3[(v-1) - (u-1)]}{(u-1)(v-1)} = \frac{3[v-1-u+1]}{(u-1)(v-1)} \\ &= \frac{3(v-u)}{(u-1)(v-1)} \end{aligned}$$

$$b) \quad u \leq v \Rightarrow v-u \geq 0, \text{ donc } 3(v-u) \geq 0$$

$$u > 1 \Rightarrow u-1 > 0; \quad v > 1 \Rightarrow v-1 > 0, \text{ donc } (u-1)(v-1) > 0$$

$$\text{Finalement } \frac{3(v-u)}{(u-1)(v-1)} \geq 0, \text{ donc } f(u) - f(v) \geq 0.$$

c) $\forall u, v \in]1; +\infty[, \quad u \leq v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$,
donc la fonction f est décroissante sur $]1; +\infty[$.

2) a) Si $1 < u \leq v$, alors $0 < u-1 \leq v-1$,
en soustrayant 1 à chaque membre
(voir l'atelier inéquations pour les règles de calcul sur les inégalités)

Si $0 < u-1 \leq v-1$, alors $\frac{1}{u-1} \geq \frac{1}{v-1}$,
car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Par suite, } \frac{3}{u-1} \geq \frac{3}{v-1},$$

en multipliant chaque membre par 3 (qui est positif).

b) Finalement $f(u) \geq f(v)$, donc f est décroissante sur $]1; +\infty[$.

Ex 12.8

1) L'expression est définie pour $x-3 \neq 0$, i.e. $x \neq 3$.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, \quad \frac{3x+1}{x-3} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = x-3$$

$$\Leftrightarrow 3x-x = -3-1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Ne pas oublier

"S = ..." !

$$S = \{-2\}$$

2°) L'expression est définie pour $2x+1 \neq 0$, i.e. $x \neq -\frac{1}{2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \quad \frac{-x+6}{2x+1} = -2$$

$$\Leftrightarrow -x+6 = -2(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow -x+6 = -4x-2$$

$$\Leftrightarrow -x+4x = -6-2$$

$$\Leftrightarrow 3x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$$

$$S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$$

Pour un premier de trouver le résultat qu'à l'exercice 1°!

Ex 12.9

1°) L'expression est définie pour $x+6 \neq 0$, i.e. $x \neq -6$.

On peut résoudre cette inéquation comme à l'exercice 8, mais au moment de multiplier chaque membre par $x+6$, il faut faire 2 cas, selon le signe de $x+6$. Car si l'on multiplie par un nombre positif, le sens de l'inégalité change.

Ici, on peut aussi faire un tableau de signes (voir vidéo YouTube)

$$x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2 ; \quad x+6 > 0 \Leftrightarrow x > -6$$

x	-6	-2	
$x+2$	-	-	+
$x+6$	-	+	+
$\frac{x+2}{x+6}$	+	-	+

$$S =]-6; -2]$$

2°) Ici je préfère de même la méthode de l'ex 12.8, en faisant deux cas.

L'expression est définie si $-x+5 \neq 0$, i.e. $x \neq 5$.

$$\text{Et } -x+5 > 0 \Leftrightarrow x < 5$$

• Si $x < 5$:

$$\frac{2x-3}{-x+5} \leq -2 \Leftrightarrow 2x-3 \leq -2(-x+5) \Leftrightarrow 2x-3 \leq 2x-10$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq -10 \quad (\text{faux}), \quad S = \emptyset.$$

④

$$\bullet \text{ Si } x > 5$$

$$\frac{2x-3}{-x+5} < -2 \Leftrightarrow 2x-3 > -2(-x+5)$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 > 2x-10$$

$$\Leftrightarrow -3 > -10 \quad (\text{vrai})$$

$$S =]5; +\infty[$$

$$\parallel \text{ Donc } S =]5; +\infty[$$

$$3^\circ) \frac{1}{2x-3} < \frac{1}{2} \quad (*)$$

Attention, on ne peut utiliser la décroissance stricte de la fonction inverse que si les deux nombres sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
les deux nombres sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

Si $2x-3 < 0$, i.e. $x < \frac{3}{2}$ alors l'inégalité (*) est vraie car le premier membre est négatif et le second positif.

Si $2x-3 > 0$, alors les deux membres appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$.
Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
l'inégalité (*) est équivalente à

$$2x-3 > 2$$

$$2x > 5$$

$$x > \frac{5}{2}$$

$$\text{Finalement, } S =]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$$

6.18.10

On rappelle que $v = \frac{d}{t}$, donc $t = \frac{d}{v}$.

$$v_{\text{moy}} = \frac{d_{\text{totale}}}{t_{\text{total}}}$$

Notons D la distance Bordeaux-Toulouse.

$$\text{Or } t_1 = \frac{D}{v_1} = \frac{D}{90}$$

$$t_2 = \frac{D}{v_2} = \frac{D}{60}$$

$$\text{Donc } t_{\text{total}} = t_1 + t_2 = \frac{D}{90} + \frac{D}{60}; \text{ de plus, } d_{\text{totale}} = D + D = 2D$$

$$\text{Ainsi, } v_{\text{moy}} = \frac{2D}{\frac{D}{90} + \frac{D}{60}}$$

on factorise D

$$= \frac{2 \times D}{D \times \left(\frac{1}{90} + \frac{1}{60}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{90} + \frac{1}{60}} \quad \text{km/h}$$

Q 12.11

$$P = \frac{4186 (T_f - T_i)}{d}$$

1°) $T_i = 20^\circ\text{C}$; $T_f = 90^\circ\text{C}$; $d = 90\text{s}$.

$$P = \frac{4186 (90 - 20)}{90} \approx 3255,78 \text{ W}$$

2°) $P = \frac{4186 \times 70}{d} = \frac{293020}{d}$

Attention, d est une
donnée donc la 300 000 -
courbe n'est déplacée 250 000 -
que sur $IR_1^{\#}$ 200 000 -
Ici on fait 150 000 -
tracer la courbe 100 000 -
sur sa calculatrice 50 000 -
dans un premier temps.
Puis à ajuster l'échelle
en ordonnée!



3°) $5000 = \frac{293020}{d}$

$$d = \frac{293020}{5000} \approx 58,604$$

Soit environ 59 secondes.